**Практическая работа №10 «**Числовая последовательность, предел последовательности**».**

Цель работы: закрепление практических навыков вычисления пределов числовых последовательностей.

**1**.Краткое содержание теоретического материала.

***Последовательности.***Рассмотрим ряд натуральных чисел:

1,  2,  3, … ,  *n* –1,  *n*, … .

 Если заменить каждое натуральное число  *n* в этом ряду некоторым числом  *un*, следуя некоторому закону, то мы получим новый ряд чисел:

*u*1*,   u*2*,   u*3*, …,   un*- 1*,   un  , …,*кратко обозначаемый { *un*}

 и называемый *числовой последовательностью*. Величина  *un*называется *общим членом*последовательности. Обычно числовая последовательностьзадаётся некоторой формулой  *un*= *f*( *n* ), позволяющей найти любой член последовательности по его номеру  *n*;эта формула называется *формулой общего члена.*Заметим, что задать числовую последовательность формулой общего члена не всегда возможно; иногда последовательность задаётся путём описания её членов (см. ниже последний пример).

 П р и м е р ы    числовых последовательностей:

   1,  2,  3,  4,  5, … -  ряд натуральных чисел ;

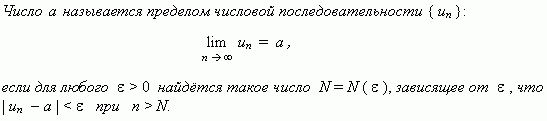
 2,  4,  6,  8,  10, … - ряд чётных чисел;

 1.4,  1.41,  1.414,  1.4142, … - числовая последовательность

  приближённых  значений http://www.bymath.net/studyguide/ana/sec/ana1c.gif

В последнем примере невозможно дать формулу общего члена последовательности, тем не менее эта последовательность описана полностью.

***Предел числовой последовательности.***Рассмотрим числовую последовательность, общий член которой приближается к некоторому числу  *a* приувеличении порядкового номера  *n*. В этом случае говорят, что числовая последовательность имеет *предел*. Это понятие имеет более строгоеопределение.



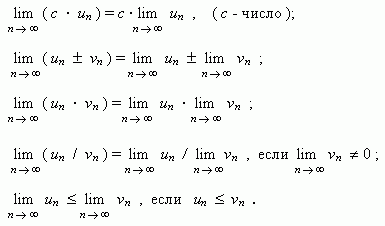
Это определение означает, что  *a*  есть *предел* числовой последовательности, если её общий член неограниченно приближается к  *a*  при возрастании  *n*. Геометрически это значит, что для любого  http://www.bymath.net/studyguide/eps.gif > 0  можно найти такое число *N*,  что начиная с  *n* > *N  все* члены последовательности расположены внутри интервала ( *a* - http://www.bymath.net/studyguide/eps.gif , *a* + http://www.bymath.net/studyguide/eps.gif ). Последовательность, имеющая предел, называется*сходящейся*; в противном случае – *расходящейся*.

Последовательность называется *ограниченной*, если существует такое число *M*, что | *un*  | http://www.bymath.net/studyguide/leq.gif *M*для всех *n .* Возрастающая или убывающая последовательность называется *монотонной*.

***Теорема Вейерштрасса.****Всякая монотонная и ограниченная последовательность имеет предел*(эта теорема даётся в средней школе без доказательства).

*Основные свойства пределов.*Нижеприведенные свойства пределов справедливы не только для числовых последовательностей, но и для функций.

Если { *un*} и { *vn*} - две сходящиеся последовательности, то:



Если члены последовательностей { *un*}, {*vn*},{*wn*}удовлетворяют неравенствам

http://www.bymath.net/studyguide/ana/sec/ana1f.gif

При вычислении пределов зачастую появляются выражения, значение которых не определено. Такие выражения называют **неопределенностями**.

### Основные виды неопределенностей: http://www.webmath.ru/poleznoe/images/limit/formules_1452.png , http://www.webmath.ru/poleznoe/images/limit/formules_1445.png , http://www.webmath.ru/poleznoe/images/limit/formules_1458.png , http://www.webmath.ru/poleznoe/images/limit/formules_1459.png , http://www.webmath.ru/poleznoe/images/limit/formules_1460.png , http://www.webmath.ru/poleznoe/images/limit/formules_1461.png , http://www.webmath.ru/poleznoe/images/limit/formules_1462.png

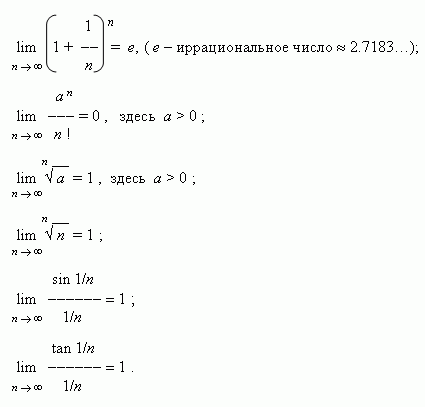
Все другие выражения не являются неопределенностями и принимают какое-то конкретное конечное или бесконечное значение.

## Раскрытие неопределенностей

Для раскрытия неопределенностей используют следующее:

1. упрощают выражение функции: раскладывают на множители, преобразовывают функцию с помощью [формул сокращенного умножения](http://www.webmath.ru/poleznoe/formules_1_0.php), [тригонометрических формул](http://www.webmath.ru/poleznoe/trig_formules.php), домножают на сопряженное, что позволяет в дальнейшем сократить и т.д., и т.п.;
2. замечательные пределы
3. [эквивалентные бесконечно малые функции](http://www.webmath.ru/poleznoe/formules_7_15.php)

***Некоторые замечательные пределы.***



**Пример.** Вычислить предел http://www.webmath.ru/poleznoe/images/limit/formules_1497.png

**Решение.** Получим неопределенность, разложим на множители числитель и знаменатель, сократим одинаковые элементы.

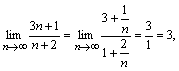
http://www.webmath.ru/poleznoe/images/limit/formules_1499.png

http://www.webmath.ru/poleznoe/images/limit/formules_1500.png

**Ответ.** http://www.webmath.ru/poleznoe/images/limit/formules_1498.png

**Пример .** Вычислить http://abc.vvsu.ru/Books/p_chisl_pos/obj.files/image1067.gif

Очевидно, числитель и знаменатель дроби стремятся к бесконечности, то есть имеется неопределенность вида http://abc.vvsu.ru/Books/p_chisl_pos/obj.files/image1069.gif. В таком случае можно вычислить предел, разделив числитель и знаменатель дроби на старшую степень *n*.



Ответ. 3

**Пример.** Вычислить предел http://www.webmath.ru/poleznoe/images/limit/formules_1485.png

**Решение.** Получим неопределенность и домножим числитель и знаменатель на выражение, сопряженное к иррациональности.

http://www.webmath.ru/poleznoe/images/limit/formules_1487.png

http://www.webmath.ru/poleznoe/images/limit/formules_1488.png

http://www.webmath.ru/poleznoe/images/limit/formules_1489.png

http://www.webmath.ru/poleznoe/images/limit/formules_1490.png

**Ответ.** http://www.webmath.ru/poleznoe/images/limit/formules_1486.png

**2.Самостоятельное выполнение задания.**

1. Вычислить пределы числовых последовательностей.

|  |  |
| --- | --- |
| 1 вариант | 2 вариант |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

1. Записать первые пять членов числовой последовательности, заданной формулой n-го члена
   * 1. Вариант аn=
     2. Вариант аn=