**Практическое занятие № 11.**

**Тема: Числовой ряд, сумма ряда. Необходимый и достаточный признак сходимости ряда.**

Цель занятия. Научиться исследовать сходимость числовых рядов, применяя различные признаки сходимости.

**Основные сведения из теории числовых рядов.**

Пусть задана бесконечная числовая последовательность



**Определение.***Числовым рядом* называется бесконечная последовательность чисел, соединенных знаком плюс, т.е. выражение вида



числа называются *членами ряда*.

Индекс, стоящий у каждого члена ряда, указывает его *порядковый номер* в ряде.

Сокращенно числовой ряд обозначается так:

 (1)

Член *Un*, номер которого не фиксирован, называется *общим членом ряда*.

**Определение.** Сумма первых *n* членов числового ряда (1)

 называется *n – ой частичной суммой.*

Для каждого числового ряда можно построить последовательность его частичных сумм:



. . . . . . . . .

**Определение.** Числовой ряд (1) называется *сходящимся,* если последовательность его частичных сумм сходится, т.е. существует конечный предел



Этот предел называют *суммой ряда* и записываюта разность - *остатком ряда*.

**Замечание.** Ряд (1) сходится тогда и только тогда, когда 

Если последовательность частичных сумм расходится, т.е., при неограниченном возрастании числа слагаемых () в частичной сумме, она или не имеет предела или её предел равен бесконечности, то ряд называют *расходящимся*.

Расходящийся ряд суммы не имеет.

*Рассмотрим основные теоремы о сходимости числовых рядов.*

**Теорема 1.** Сходимость или расходимость ряда не нарушится, если изменить, отбросить или добавить конечное число членов ряда (сумма при этом изменится).

**Теорема 2.** Если ряд сходится и имеет сумму *S,* то ряд



который получается из предыдущего умножением всех членов на одно и тоже число *с*, также сходится и имеет сумму *cS*.

**Теорема 3.** Сходящиеся ряды можно почленно складывать и вычитать, т.е., если , тогда ряд  также сходится и имеет сумму 

**Теорема 4** (*необходимый признак сходимости ряда*). Если ряд сходится, то его общий член *Un* стремится к нулю, при неограниченном возрастании *n*, т.е. 

Отсюда следует, что если  то ряд расходится.

**Замечание.** Указанный признак не является достаточным, т.е. если то вопрос о сходимости ряда ещё не решен: он может быть как сходящимся так и расходящимся.

При рассмотрении числовых рядов практически решаются две задачи:

1) исследовать, сходится или расходится ряд;

2) зная, что ряд сходится, найти его сумму.

Мы будем решать первую задачу, т.е. исследовать ряды на сходимость.

**Числовые ряды с положительными членами.**

Рассмотрим числовой ряд

. (1)

**Определение.** Если все члены ряда (1) то ряд называется *знакоположительным.*

Очевидно, в этом случае частичная сумма *Sn* возрастает с возрастанием *n.*

Поэтому положительный ряд либо сходится либо его сумма бесконечна, т.е.

или 

Рассмотрим некоторые *достаточные признаки* сходимости и расходимости рядов с *положительными членами.*

***Признак сравнения.***

Пусть

= (2)

и  (3)

- два ряда с положительными членами.

Пусть члены ряда (2), начиная с некоторого номера *n0*, меньше соответствующих членов ряда (3), т.е.  Тогда

**1)** Если ряд (3) сходится, то ряд (2) также сходится. В этом случае ряд (3) называется *мажорантой ряда* (2).

Таким образом, положительный ряд сходится, если он обладает сходящейся мажорантой.

**2)** Если ряд (2) расходится, то ряд (3) также расходится.

Схематично суть признака сравнения выглядит так



**Теорема** (*предельная форма признака сравнения*). Если для рядов (2) и (3) выполняется условие



то рассматриваемые ряды одновременно сходятся или расходятся.

Чтобы с помощью признака сравнения исследовать ряды на сходимость, нужно иметь такие ряды, о которых заранее известно, сходятся они или расходятся.

Для сравнения обычно используются следующие эталонные ряды: геометрический, гармонический и другие.

**Геометрический ряд**



сходится при условии *q< 1* и его суммаесли то геометрический ряд расходится.

**Гармонический ряд**



расходится.

**Обобщенный гармонический ряд (ряд Дирихле)**



сходится, если  и расходится, если 

***Признак Даламбера.***

Если члены ряда положительны и существует предел



то при ряд сходится;

при ряд расходится;

привопрос о том, сходится ряд или расходится, не решен и требуется дополнительное исследование с помощью других достаточных признаков сходимости.

***Радикальный признак Коши.***

Если члены ряда положительны и существует предел



то при ряд сходится;

при ряд расходится;

привопрос о том, сходится ряд или расходится, не решен и требуется дополнительное исследование с помощью других достаточных признаков сходимости.

**Указание 1.**

**Постановка задачи.** Исследовать сходимость ряда с положительными членами



где *Un* содержит произведения многих сомножителей (например, факториалы).

**План решения.** Если при вычислении предела



можно сократить множители в числителе и знаменателе дроби , то обычно применяют *признак Даламбера*.

1. Проверим, что *Un>0* при всех 

2. Найдем . Для этого в формуле определения общего члена ряда*Un* заменим *n* на *n+1*.

3. Вычислим предел 

4. Применим признак Даламбера.

**Пример.** Исследовать сходимость ряда .

**Решение.**

1. Проверим, что члены ряда положительны. Действительно,



при всех 

2. Найдем :



3. Вычислим предел



4. Применим признак Даламбера. Так как *k=0<1*, то ряд



сходится.

**Указание 2.**

**Постановка задачи.** Исследовать сходимость ряда с положительными членами



где  существует и легко вычисляется.

**План решения.** Если  имеет, например, вид или то  существует и легко вычисляется. В таком случае обычно применяют радикальный признак Коши.

1. Проверим, что *Un>0* при всех 

2. Вычислим предел 

3. Применим радикальный признак Коши.

**Замечание.** Полезно иметь в виду, что

,

где *P(n)* – многочлен относительно *n*.

**Пример.** Исследовать сходимость ряда



**Решение.** Общий член ряда имеет вид , где 

***1 способ.***

1. Проверим, что члены ряда положительны. Действительно,



при всех 

2. Вычислим предел



3. Применим радикальный признак Коши. Так как , то ряд



расходится.

***2 способ.*** Нарушается *необходимый признак сходимости ряда:*



а не *ноль*. Следовательно, ряд расходится.

**Задачи для решения.**

Исследовать сходимость рядов.



Ответы. 