**Конспект Тема урока: «Тела вращения. Конус, цилиндр, шар и сфера».**

# Тела вращения

**Тела вращения**— объёмные тела, возникающие при вращении замкнутой линии вокруг оси, лежащей в той же плоскости, что и вращающееся тело.

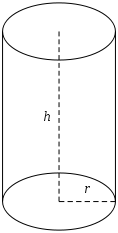
## Примеры тел вращения

## 

* [Шар](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A8%D0%B0%D1%80) — образован полукругом, вращающимся вокруг диаметра разреза.
* [Цилиндр](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A6%D0%B8%D0%BB%D0%B8%D0%BD%D0%B4%D1%80) — образован прямоугольником, вращающимся вокруг одной из сторон.
* [Конус](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9A%D0%BE%D0%BD%D1%83%D1%81) — образован прямоугольным треугольником, вращающимся вокруг одного из катетов.
* [Тор](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A2%D0%BE%D1%80_(%D0%BF%D0%BE%D0%B2%D0%B5%D1%80%D1%85%D0%BD%D0%BE%D1%81%D1%82%D1%8C)) — образован кругом, вращающимся вокруг прямой, не пересекающей его.

При вращении контуров фигур возникает поверхность вращения (например, [сфера](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A1%D1%84%D0%B5%D1%80%D0%B0), образованная [окружностью](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9E%D0%BA%D1%80%D1%83%D0%B6%D0%BD%D0%BE%D1%81%D1%82%D1%8C)), в то время как при вращении заполненных контуров возникают тела (как шар, образованный [кругом](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9A%D1%80%D1%83%D0%B3)).

### Цилиндр.



Правильный круглый цилиндр



**Цили́ндр** ([греч.](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%93%D1%80%D0%B5%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%B8%D0%B9_%D1%8F%D0%B7%D1%8B%D0%BA) kýlindros, валик, каток) — геометрическое тело, которое состоит из двух кругов, не лежащих в одной плоскости и совмещаемых параллельным переносом, и всех отрезков, соединяющих соответствующие точки этих кругов. Круги называются *основаниями цилиндра*, а отрезки, соединяющие соответствующие точки окружностей кругов, - *образующими цилиндра*.

*Примеры тел, имеющих форму цилиндра:*

Сквозное отверстие в стене, сделанное дрелью, является цилиндром: его основание – круг с диаметром, равным диаметру сверла, высота – толщина стены.

Ваши примеры:

**Связанные определения.**

* Цилиндр называется *прямым*, если его образующие перпендикулярны плоскостям оснований.
* *Радиусом цилиндра* называется радиус его основания.
* *Высотой цилиндра* называется расстояние между его плоскостями.
* *Осью цилиндра* называется прямая, проходящая через центр оснований. Она параллельна образующим.
* *Осевое сечение –* сечение цилиндра плоскостью, проходящей через его ось.

**Свойства**

* Основания цилиндра равны.
* У цилиндра основания лежат в параллельных плоскостях.
* У цилиндра образующие параллельны и равны.
* Поверхность цилиндра состоит из оснований и боковой поверхности. Боковая поверхность составлена из образующих.

**Основные формулы**

*V* = π*r*2*h* - [***объём***](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9E%D0%B1%D1%8A%D1%91%D0%BC) прямого кругового цилиндра

*S* = 2π*rh* - ***Площадь боковой поверхности цилиндра***

(где *r* — радиус основания, *h* — высота).

***Площадь полной поверхности цилиндра*** складывается из площади боковой поверхности и площади оснований. Для прямого кругового цилиндра:

*S* = 2π*rh* + 2π*r*2.

**Задачи по теме «Цилиндр»**

1.*Радиус основания цилиндра 2 см, высота 3 см. Найдите диагональ осевого сечения.*

*Дано*: цилиндр,

r = 2 см,

h =3 см,

*Найти*: d – диагональ осевого сечения

*Решение*. Рассмотрим прямоугольный треугольник, катетами которого являются высота цилиндра и диаметр основания, а гипотенузой – диагональ осевого сечения. По теореме Пифагора получим:

см

*Ответ*: 5 см.

*2 Радиус основания цилиндра равен 5 см, а его образующая – 9 см. Найдите площадь осевого сечения.*

*Дано*: цилиндр,

ABCD – осевое сечение,

AO =5 см,

AB=9см.

*Найти*: 

*Решение*. Данное осевое сечение есть прямоугольник ABCD. Сторона прямоугольника AD=2\*5 =10 (см). Поэтому площадь сечения

.

*Ответ*: 90 .

*3.Прямоугольник, стороны которого равны 6 см и 4 см, вращается около меньшей стороны. Найдите площадь поверхности тела вращения.*

*Дано*:

ABCD – прямоугольник,

AВ = 6 см,

BС = 4см,

ВC – ось вращения.

*Найти*: 

*Решение*. Данное тело вращения – прямой круговой цилиндр с высотой BC = 4 см и радиусом основания АВ = 6 см.

Площадь боковой поверхности



Площадь основания



Площадь полной поверхности



*Ответ*:  .

*4. Длина окружности основания прямого цилиндра С = 10 м, длина образующей l = 7 м. Чему равна площадь боковой поверхности цилиндра?*

*Дано*: цилиндр,

C = 10 м,

*l* = 7 м.

*Найти*: 

*Решение*. Площадь боковой поверхности цилиндра равна произведению длины окружности его основания н высоту: S = CH. Высота цилиндра равна его образующей:

H = 10 м. Поэтому

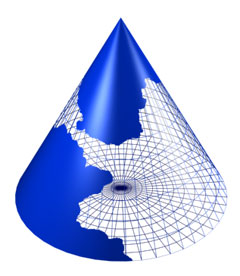


*Ответ*: 70.

**Вопросы по теме «Цилиндр»**

1. Что такое цилиндр?
2. Что такое высота цилиндра?
3. Какой цилиндр называется прямым?
4. Осевое сечение цилиндр – квадрат, площадь которого Q. Чему равна площадь основания цилиндра?

# Конус



Прямой круговой конус

**Ко́нус** — [тело](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A2%D0%B5%D0%BB%D0%BE), которое состоит из круга – *основания конуса*, точки, не лежащей в плоскости этого круга, - *вершины конуса* и всех отрезков, соединяющих вершину конуса с точками основания. Если основание конуса представляет собой [многоугольник](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9C%D0%BD%D0%BE%D0%B3%D0%BE%D1%83%D0%B3%D0%BE%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D0%B8%D0%BA), конус становится [пирамидой](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D0%B8%D1%80%D0%B0%D0%BC%D0%B8%D0%B4%D0%B0_(%D0%B3%D0%B5%D0%BE%D0%BC%D0%B5%D1%82%D1%80%D0%B8%D1%8F)).

*Примеры тел, имеющих форму конуса:*

1. Чум и яранга у северных народов, вигвам у индейцев Северной Америки имеют форму, близкую к форме конуса.

Ваши примеры из жизни и техники:

## Связанные определения

* Отрезок, соединяющий вершину и границу основания, называется *образующей конуса*.
* Объединение образующих конуса называется *образующей* (или *боковой*) *поверхностью конуса*. Образующая поверхность конуса является [конической поверхностью](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9A%D0%BE%D0%BD%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%B0%D1%8F_%D0%BF%D0%BE%D0%B2%D0%B5%D1%80%D1%85%D0%BD%D0%BE%D1%81%D1%82%D1%8C).
* Отрезок, опущенный перпендикулярно из вершины на плоскость основания (а также длина такого отрезка), называется *высотой конуса*.
* Конус называется *прямым*, если прямая, соединяющая вершину конуса с центром основания, перпендикулярна плоскости основания. При этом прямая, соединяющая вершину и центр основания, называется *осью конуса*.
* Сечение конуса плоскостью, проходящей через его ось, называется *осевым сечением.*
* *Круговой конус* — конус, основание которого является кругом.
* **Прямой круговой конус** (часто его называют просто конусом) можно получить вращением прямоугольного [треугольника](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A2%D1%80%D0%B5%D1%83%D0%B3%D0%BE%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D0%B8%D0%BA) вокруг [прямой](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D1%80%D1%8F%D0%BC%D0%B0%D1%8F), содержащей [катет](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9A%D0%B0%D1%82%D0%B5%D1%82) (эта прямая представляет собой ось конуса).
* Конус, опирающийся на [эллипс](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%AD%D0%BB%D0%BB%D0%B8%D0%BF%D1%81), [параболу](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D0%B0%D1%80%D0%B0%D0%B1%D0%BE%D0%BB%D0%B0) или [гиперболу](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%93%D0%B8%D0%BF%D0%B5%D1%80%D0%B1%D0%BE%D0%BB%D0%B0), называют соответственно *эллиптическим*, *параболическим* и *гиперболическим конусом* (последние два имеют бесконечный объём).
* Часть конуса, лежащая между основанием и плоскостью, параллельной основанию и находящейся между вершиной и основанием, называется *усечённым конусом*.

## Свойства

* Плоскость, перпендикулярная оси конуса, пересекает конус по кругу, а боковую поверхность – по окружности с центром на оси конуса.
* Сечение конуса плоскостью, параллельной основанию, отсекает от него конус, подобный данному.
* Площадь полной поверхности конуса равна



* [Площадь](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D0%BB%D0%BE%D1%89%D0%B0%D0%B4%D1%8C) боковой поверхности конуса равна

*S* = π*Rl*

где *R* — радиус основания, *l* — длина образующей.

* [Объем](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9E%D0%B1%D1%8A%D0%B5%D0%BC) кругового конуса равен



**Задачи по теме «Конус»**

*1. Радиус основания конуса 3 м, высота 4 м. Найдите образующую l.*

*Дано*: конус,

r = 3 м,

h =4 м,

*Найти*: *l* – образующая конуса

*Решение*. Рассмотрим прямоугольный треугольник, катетами которого являются высота конуса и радиус основания, а гипотенузой – образующая конуса. По теореме Пифагора получим:

м

*Ответ*: 5 м.

2.*Радиус основания конуса R.. Осевым сечением конуса является прямоугольный треугольник. Найдите его площадь.*

*Дано*: конус,

*R* – радиус основания,

∆ABC – осевое сечение конуса,



*Найти*: 

*Решение*. Так как этот прямоугольный треугольник является еще и равнобедренным, то высота в нем, проведенная к основанию, является и медианой. Медиана, проведенная к гипотенузе равна половине гипотенузы, то есть, радиусу, так как гипотенуза равна диаметру.



*Ответ*: .

3. *В равностороннем конусе (осевое сечение – правильный треугольник) радиус основания R .Найдите площадь сечения, проведенного через две образующие, угол между которыми равен α.*

*Дано*: конус,

*R –* радиус основания,

∆ABC – осевое сечение конуса,

MC, KC – образующие конуса,



*Найти*: 

*Решение*. Так как в осевом сечении ∆ABC – правильный, то образующая AC = AB = 2R. Площадь ∆MCK найдем по формуле



*Ответ*: .

*4. Конус пересечен плоскостью, параллельной основанию, на расстоянии d от вершины. Найдите площадь сечения, если радиус основания конуса R, а высота H.*

*Дано*: конус,

*α –* плоскость,

*R* – радиус основания,

СD = H,

С – вершина конуса,

СК = d

*Найти*: 

*Решение*.

Сечение конуса получается из основания конуса преобразованием гомотетии (гомотетия – преобразование подобия, то есть, преобразование фигуры *F* в фигуру , при котором расстояние между точками изменяются в одно и то же число раз) относительно вершины конуса с коэффициентом гомотетии . Поэтому  и . Следовательно, площадь сечения

.

*Ответ*: .

*5. Высота конуса H. На каком расстоянии от вершины надо провести плоскость, параллельную основанию, чтобы площадь сечения была равна половине площади основания?*

*Дано*: конус,

*α –* плоскость,

H - высота,







*Найти*: h

*Решение*.

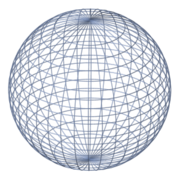
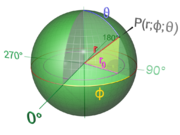
Проведенная плоскость отсекает подобный конус. В подобных фигурах отношение линейных размеров равно коэффициенту подобия, а отношение соответствующих площадей – квадрату коэффициента подобия. Значит, . Отсюда  . Тогда  и 

*Ответ*: .

**Вопросы к теме «Конус»**

1. Что такое конус?
2. Какой конус называется круговым?
3. Что такое образующая конуса?

# Шар и сфера



|  |
| --- |
| сфера |

шар

**Шар** — геометрическое тело, ограниченное поверхностью, все точки которой отстоят на равном расстоянии от центра. Это расстояние называется *радиусом шара*. Шар образуется вращением полукруга около его неподвижного диаметра. Этот диаметр называется *осью шара*, а его оба конца — *полюсами шара*. Поверхность шара называется [**сферой**](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A1%D1%84%D0%B5%D1%80%D0%B0).

*Примеры тел, имеющих форму шара или сферы:*

1. Купол здания может иметь форму части сферы, отсеченной плоскостью.
2. Земля имеет форму, близкую к шару.
3. Мячи для игры в футбол, теннис имеют форму шара.

*Ваши примеры:*

## Связанные определения

1. Если секущая плоскость проходит через центр шара, то сечение шара называется [*большим кругом*](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%91%D0%BE%D0%BB%D1%8C%D1%88%D0%BE%D0%B9_%D0%BA%D1%80%D1%83%D0%B3). Другие плоские сечения шара называются *малыми кругами*
2. Любой отрезок, соединяющий центр шара с точкой шаровой поверхности (сферы), называется *радиусом*.
3. Отрезок, соединяющий две точки шаровой поверхности и проходящей через центр шара, называется *диаметром*.
4. Концы любого диаметра называются *диаметрально противоположными точками шара.*
5. Плоскость, проходящая через центр шара, называется *диаметральной плоскостью.*
6. Плоскость, проходящая через точку А шаровой поверхности и перпендикулярная радиусу, проведенному в точку А, называется *касательной плоскостью*. Точка А называется *точкой касания*.

**Свойства**

1. Всякое сечение шара плоскостью есть круг. Центр этого круга есть основание перпендикуляра, опущенного из центра шара на секущую плоскость.
2. Любя диаметральная плоскость шара является его плоскостью симметрии. Центр шар является его центром симметрии.
3. Касательная плоскость имеет с шаром только одну общую точку – точку касания.
4. Линия пересечения двух сфер есть окружность.

**Основные формулы**

1. Площадь сферы радиуса R вычисляется по формуле



**Задачи по теме «Шар и сфера»**

*1.Радиус сферы увеличили в 3 раза. Во сколько раз увеличится площадь сферы?*

*Дано*: r – радиус исходной сферы,

R – радиус новой сферы,

R = 3r

*Найти*: 

*Решение*. 

*Ответ*: в 9 раз.

*2. Шар, радиуса 41 дм, пересечен плоскостью на расстоянии 9 дм от центра*

*Найдите площадь сечения.*

*Дано*: шар,

R = 41 дм,

ОА = 9 дм,

О – центр щара.

*Найти*: 

*Решение*.

Из прямоугольного треугольника АВС:  дм.

Площадь сечения



*Ответ*: 16 .

*3.Через середину радиуса шара проведена перпендикулярная ему плоскость. Как относится площадь полученного сечения к площади большого круга?*

*Дано*: шар,

R – радиус шара,

α – плоскость,

ОА = 1/2R,

О – центр щара.

*Найти*: 

*Решение*. Из прямоугольного треугольника АOВ:  .



*Ответ*: .

4. *Радиус шара R. Через конец радиуса проведена плоскость под углом 600 к нему. Найти площадь сечения.*

*Дано*: шар,

R – радиус шара,

,

О – центр щара.

*Найти*: 

*Решение*. Из прямоугольного треугольника АОВ:  .

Площадь сечения



*Ответ*: 

*5. Город N находится на 600 северной широты. Какой путь совершает этот пункт в течение 1 ч. Вследствие вращения Земли вокруг своей оси? Радиус Земли принять равным 6000 км.*

*Дано*: шар,

R = 6000 км,

,

О – центр щара.

*Найти*: S- путь

*Решение*.

В прямоугольном треугольнике АОN: (как внутренние накрест лежащие углы при параллельных прямых AB и OK). Тогда  . За один час город N опишет дугу, равную 1/24 части длины окружности с радиусом AN. Значит,



*Ответ*: 785 км.

**Вопросы по теме «Шар и сфера»**

1. Что такое шар?
2. Что такое радиус шара, диаметр шара? Какие точки шара называются диаметрально противоположными?
3. Что такое большой круг шара?